

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES. XVII

FERRAN SUNYER I BALAGUER

PROFESSOR-COL·LABORADOR DEL SEMINARI MATEMÀTIC DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA

UNA NOVA GENERALITZACIÓ
DE LES FUNCIONS
GAIREBÉ-PERIÒDIQUES

PREMI PRAT DE LA RIBA, 1948

BARCELONA

1949

UNA NOVA GENERALITZACIÓ
DE LES FUNCIONS
GAIREBÉ-PERIÒDIQUES

This One



PYQ3-44U-WKP6

INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS

ARXIU DE LA SECCIÓ DE CIÈNCIES. XVII

FERRAN SUNYER I BALAGUER

PROFESSOR-COL·LABORADOR DEL SEMINARI MATEMÀTIC DE LA UNIVERSITAT DE BARCELONA

UNA NOVA GENERALITZACIÓ
DE LES FUNCIONS
GAIREBÉ-PERIÒDIQUES

PREMI PRAT DE LA RIBA, 1948

BARCELONA

1949

És propietat de l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS.

A proposta d'una ponència formada pels Membres de la Secció de Ciències de l'INSTITUT senyors Eduard Fontserè, Joaquim Carreras i Artau i Leandre Cervera, als quals s'adjuntaren com a especialistes els senyors Jordi Rubió, membre de la Secció Històrico-Arqueològica de l'INSTITUT, Salvador Millet i Bel, Professor als Estudis Universitaris Catalans, i Josep M. Orts i Aracil, Professor de la Facultat de Ciències de la Universitat de Barcelona, l'INSTITUT D'ESTUDIS CATALANS, en sessió plenària celebrada el dia 17 d'abril de 1948, acordà per unanimitat concedir el IX Premi Prat de la Riba al senyor Ferran Sunyer i Balaguer pel seu treball *Una nova generalització de les funcions gairebé-periòdiques*.

En la sessió plenària del dia 30 de juny del mateix any l'INSTITUT prengué l'acord de publicar aquest treball.

INTRODUCCIÓ

Excepte unes generalitzacions de Besicowitch,¹ fins ara la teoria de les funcions gairebé-periòdiques havia tractat solament de funcions holomorfes; encara més, en la generalització de Besicowitch els pols de les funcions meromorfes considerades eren en nombre finit, i a més, havien d'ésser exclosos de la resta del pla complex mitjançant petits cercles, això no tan sols en les demostracions, sinó en els enuncis dels resultats, els quals, sense aquesta exclusió, deixaven d'ésser vàlids.

Això feia que fos impossible d'intentar la definició d'una classe de funcions doblement gairebé-periòdiques que compregués la classe de les funcions el·líptiques, de la mateixa manera que les funcions gairebé-periòdiques en una faixa, comprèn les funcions periòdiques en aquesta mateixa faixa.

L'objecte del present treball és l'obtenció d'una generalització de la idea de gairebé-periodicitat, de manera que compregui funcions que prenen el valor infinit.

La primera idea que s'acut és la utilització de la projecció estereogràfica dels valors de la funció sobre l'esfera de Riemann, puix quasi sempre que vol estendre's una teoria de les funcions holomorfes a la classe de les funcions meromorfes, aquesta projecció dona el resultat desitjat (per exemple, en la teoria de les famílies normals de Montel). Aquesta és precisament la idea que pensem desenrotllar ací. Els principals resultats d'aquesta memòria han estat comunicats a l'Acadèmia de Ciències de París i apareixeran en els seus «Comptes Rendus».²

1. A. S. BESICOVITSCH: *Über die Parsevalsche Gleichung für analytische fastperiodische Funktionen*, «Acta Math.», XLVII (1926), 283-295.

2. F. SUNYER I BALAGUER: *Une généralisation des fonctions presque-périodiques*, «Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris», CCXXVIII (1949), 732-734, i *Une généralisation des fonctions presque-périodiques: fonctions presque-elliptiques*, «Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris», CCXXVIII (1949), 797-799.

Poc abans de publicar-se aquestes dues notes (o sigui a finals del 1948), el senyor FAVARD em comunicà que ell («Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris», CLXXXV (1927), 1.434), BESSONOF («Comptes Rendus de l'Acad. Sci. Paris», CLXXXIV (1926), 1.011, i CLXXXVI (1928), 63) i NORGIL («Matematisk Tidsskrift», B, IV (1930), 73), havien tractat temes estretament relacionats amb la segona de les meves Notes, o sigui amb el tercer capítol de la present memòria. Aquests treballs m'eren desconeguts. Favard, en la seva Nota, estudia, per una altra classe de funcions, un resultat semblant al meu teorema XXV. Les Notes de Bessonof contenen múltiples errors que disminueixen el seu valor. Finalment, Norgil corregeix alguns dels

En el capítol primer definirem una classe de funcions que comprèn la classe de les funcions gairebé-periòdiques de Bohr, però que no té la propietat d'ésser invariable respecte a les operacions aritmètiques; en particular, la suma de dues funcions d'aquesta classe pot ésser una funció que no pertany a ella. Aquest fet, juntament amb altres, fa que les relacions existents entre les funcions de Bohr i les sèries de Fourier generalitzades, deixin d'ésser satisfetes per les altres funcions de la classe que estudiarem. Per contra, les restants propietats de les funcions de Bohr tenen, en general, les seves corresponents per les funcions de la classe més àmplia que definirem; és a dir, existeixen propietats d'aquestes últimes funcions que, quan aquestes són funcions de Bohr, es converteixen en les propietats ja conegudes d'aquestes últimes funcions.

En el capítol segon estendrem la mateixa definició a les funcions meromorfe en una faixa. En aquest cas, i gràcies a un resultat que demostrarem (teorema XXI), la relació entre les nostres funcions i les funcions de Bohr esdevé més estreta i faria possible l'obtenció de relacions entre les sèries de Dirichlet i les nostres funcions; però, aquest tema no serà estudiat en aquest treball, puix ens portaria molt lluny de l'objecte principal que ens hem proposat.

Aquest objecte serà estudiat en el capítol tercer, on definirem una classe de funcions que anomenarem doblement gairebé-periòdiques R , o gairebé el·líptiques; la qual classe contindrà la de les funcions el·líptiques, conservant certes propietats que fins ara tan sols havien estat demostrades per les funcions el·líptiques (en particular trobarem uns resultats que corresponen al primer, segon i tercer teorema de Liouville).

Com habitualment, representarem per

$$|Z, Z'|$$

la distància entre les projeccions estereogràfiques sobre l'esfera de Riemann dels dos punts Z i Z' del pla complex.

També, com de costum, definirem la continuïtat esfèrica de la funció $f(z)$ (que nosaltres anomenarem continuïtat R ; de la inicial de Riemann³⁾) de la se-

errors de Bessonof i dona uns resultats pròxims als meus teoremes XXIII, XXIV i XXV; però ni Bessonof ni Norgil no demostren ni indiquen l'estreta relació que existeix entre les propietats de les funcions gairebé-el·líptiques i les de les el·líptiques, relació que sobresurt dels meus teoremes XXV a XXXVII.

Aprofito gustosament aquesta avinentesa per donar públicament les gràcies al senyor Fàvard per la seva informació bibliogràfica i per haver-me enviat la memòria de Norgil, en indicar-li que aquesta no es trobava a cap biblioteca de Barcelona. (*Nota afegida durant la correcció de proves.*)

3. En comunicar a l'Acad. de Paris els principals resultats, vaig pensar anomenar les meves funcions «presque-périodiques S », de la inicial de la paraula francesa «sphériques»; però, existint ja les funcions «presque-périodiques S », inicial de Stepanoff, vaig veure'm obligat a utilitzar l'expressió «presque-périodiques R », inicial de Riemann; per donar més homogeneïtat a la nomenclatura, utilitzem també continuïtat R en lloc de continuïtat esfèrica, o sigui continuïtat en l'esfera de Riemann, etc.

güent manera: una funció $f(z)$ és contínua R en un punt z_0 , si per tot valor $\epsilon > 0$, és possible trobar un $\eta > 0$ que de la desigualtat $|z - z_0| \leq \eta$, en resulti

$$|f(z), f(z_0)| \leq \epsilon$$

Després d'aquesta definició no cal insistir sobre el significat que donarem a les expressions següents: continuïtat R en un interval o domini, uniforme continuïtat R, convergència R d'una successió de funcions, uniforme convergència R d'una successió de funcions en un interval o domini.

Finalment, per evitar explicacions que farien inútilment feixuc el text, donarem unes petites indicacions sobre les notacions que utilitzarem, sense perjudici, però, de repetir-les quan ho creguem convenient per a la comprensió més perfecta dels enunciats o de les demostracions.

La n representarà un nombre real i enter i sovint una quantitat que pot prendre tota la successió de nombres enters reals; algunes vegades aquesta idea vindrà també representada per la lletra k , però generalment, aquesta notació, igualment que les h , a , b , c , x i y , representarà quantitats reals qualssevol. Per contra, la z i la s representaran sempre variables que poden prendre valors complexos. Finalment, les expressions $U(x)$ i $V(x)$ representaran funcions que tan sols poden prendre valors reals, mentre $f(x)$ o $f(z)$ representaran funcions que poden prendre valors complexos.

Barcelona, 7 de març de 1948

FUNCIONS GAIREBÉ-PERIÒDIQUES R EN UNA RECTA

1. DEFINICIÓ. — Una funció $f(x)$, real o complexa, d'una variable real x , definida i contínua R en tot l'interval $-\infty < x < +\infty$, serà dita gairebé-periòdica R quan a tot nombre positiu ϵ , tan petit com es vulgui, es pot fer correspondre una llargada $l = l(f, \epsilon)$, anomenada llargada o interval d'inclusió, tal que tot interval de llargada l conté, almenys, un nombre $\tau = \tau(f, \epsilon)$, anomenat gairebé-període R de f relatiu a ϵ , pel qual tingui lloc la desigualtat

$$|f(x+\tau), f(x)| \leq \epsilon,$$

per qualsevol valor de x .

Com sigui que un conjunt de punts situat en una recta és dit relativament dens, si existeix una llargada l finita tal que, en tot interval de llargada l , existeix almenys un punt pertanyent al conjunt, la definició anterior pot abreujar-se dient que el conjunt format per tots els $\tau(f, \epsilon)$, corresponents a un valor qualsevol però determinat de ϵ , és relativament dens.

La hipòtesi de l'existència de la llargada l fou imposada per Bohr principalment a fi que la suma de dues funcions g. p. (d'ara endavant l'expressió gairebé-periòdica vindrà representada abreujadament per g. p.) fos també una funció g. p.; amb tot i que la suma de dues funcions g. p. R no sempre és una funció g. p. R, hem conservat la hipòtesi de l'existència de la llargada d'inclusió a fi que una funció g. p. R que sigui afitada,⁴ sigui una funció g. p. de Bohr.

2. De la definició resulta immediatament que:

TEOREMA I. — Si

$$f(x) = U(x) + iV(x)$$

és una funció g. p. R, també ho seran $f(x+k)$, $f(kx)$ ($k = \text{constant real}$), $\frac{1}{f(x)}$, $|f(x)|$, $[f(x)]^n$ ($n = \text{nombre enter}$) i

$$f(x) = U(x) - iV(x)$$

4. Equivalent al mot francès «bornée».

Degut a la propietat tot just assenyalada que la suma de dues funcions g. p. R no sempre és una funció g. p. R, no podrem afirmar, amb la sola hipòtesi del teorema I, que també siguin g. p. R la part real $U(x)$ i la part imaginària $V(x)$

TEOREMA II. — *Tota funció $f(x)$ que sigui g. p. R és també uniformement contínua R en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$.*

La demostració d'aquest teorema la donarem esquematitzada, puix és quasi igual a la del teorema corresponent vàlid per les funcions g. p. de Bohr; sempre que succeeixi aquest cas donarem les demostracions en forma abreujada, excepte en alguns casos on per la importància dels resultats creguem convenient de donar-la en forma extensa. Fet aquest parèntesi passem a demostrar el teorema II.

Sigui ϵ un nombre positiu qualsevol, evidentment és possible trobar un nombre $\eta > 0$ tal que de les condicions

$$0 \leq x_1 \leq l \left(f, \frac{\epsilon}{3} \right), \quad |x_1 - x_2| \leq \eta$$

resulti la

$$|f(x_1), f(x_2)| \leq \frac{\epsilon}{3}$$

a més, per x'_1 qualsevol serà possible sempre determinar un τ que sigui gairebé-període R de f relatiu a $\frac{\epsilon}{3}$ i que satisfaci

$$0 \leq x'_1 - \tau \leq l \left(f, \frac{\epsilon}{3} \right),$$

per tant, si $|x'_1 - x'_2| < \eta$, tindrem

$$|f(x'_1), f(x'_2)| \leq |f(x'_1), f(x'_1 - \tau)| + \\ + |f(x'_1 - \tau), f(x'_2 - \tau)| + |f(x'_2 - \tau), f(x'_2)| < \epsilon,$$

i el teorema queda demostrat.

TEOREMA III. — *Siguin $f_1, f_2, \dots, f_n$; n funcions g. p. R, existeix sempre una llargada $l(\epsilon)$ tal que tot interval de llargada l conté un gairebé-període R comú a $f_1, \dots, f_n$ relatiu a ϵ .*

La demostració d'aquest teorema s'efectua primer per dues funcions, seguint el següent camí: es comença per demostrar l'existència d'una llargada L tal que, en tot interval de llargada L , existeix sempre un τ_1 gairebé-període R de f_1 relatiu a $\frac{\epsilon}{2}$ que és múltiple d'una quantitat η i un τ_2 gairebé-període R de f_2 relatiu a $\frac{\epsilon}{2}$ i que és també múltiple de la mateixa quantitat η .

A partir d'aquesta propietat es demostra fàcilment l'existència d'una quantitat q tal que, si τ_1 i τ_2 tenen les propietats assenyalades en el paràgraf anterior, pot trobar-se un τ'_1 gairebé-període R de f_1 relatiu a $\frac{\epsilon}{2}$ i un τ'_2 gairebé-període R de f_2 relatiu a $\frac{\epsilon}{2}$ que satisfan

$$|\tau'_1| \leq q, \quad |\tau'_2| \leq q$$

i

$$|\tau'_1 - \tau'_2| = |\tau_1 - \tau_2|.$$

Finalment, de tot això resulta immediatament que

$$l'(\epsilon) = L + 2q$$

és la quantitat que satisfà el teorema en el cas de dues funcions.

Per recurrència hom veu fàcilment que el teorema és vàlid també, per tot nombre n finit de funcions.

TEOREMA IV. — *La funció $F(x)$, límit d'una successió $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ de funcions g. p. R uniformement convergent R en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$, és també g. p. R.*

Demostració. — Quan $|F(x), f_n(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}$, tot τ que sigui gairebé-període R de f_n relatiu a $\frac{\epsilon}{3}$ serà també un gairebé-període de F relatiu a ϵ .

3. Amb tot i que, segons hem dit, la suma de dues funcions g. p. R no sempre és una funció g. p. R, pot demostrar-se el resultat següent:

TEOREMA V. — *Sigui $f(x)$ una funció g. p. R i $\varphi(x)$ una funció g. p. de Bohr (g. p. R afitada); la funció*

$$F(x) = f(x) + \varphi(x)$$

és també una funció g. p. R.

Demostració. — Per un ϵ qualsevol és fàcil determinar un η_0 tal que, si z satisfà

$$|z, \infty| < \eta_0$$

satisfarà també

$$||z| - M, \infty| < \frac{\epsilon}{2},$$

on $M = \text{fita sup}_{-\infty < x < +\infty} |\varphi(x)|$.

Per tant, si

$$|f(x), \infty| < \frac{\eta_0}{2} \quad |f(x), f(x_1)| < \frac{\eta_0}{2},$$

resultarà

$$|F(x), F(x_1)| < \epsilon.$$

Per altra banda, donat ϵ i determinat η_0 com acabem d'explicar, és fàcil demostrar l'existència d'un η_1 , que depèn de ϵ , tal que les desigualtats

$$|z, \infty| \geq \frac{\eta_0}{2} \quad |z - z_1| \leq \eta_1$$

$$|s| \leq M, \quad |s - s_1| \leq \eta_1,$$

imposin la validesa de la següent:

$$|z + s, z_1 + s_1| \leq \epsilon.$$

A més, resulta sempre possible la determinació d'una η_2 , que depèn únicament de M , η_1 i η_0 , tal que de les desigualtats

$$|z, \infty| \geq \frac{\eta_0}{2} \quad |z, z_1| \leq \eta_2,$$

$$|s| \leq M, \quad |s, s_1| \leq \eta_2,$$

resulten

$$|z - z_1| \leq \eta_1, \quad |s - s_1| \leq \eta_1.$$

De tot això, resulta finalment que, si $\epsilon_1 = \min\left(\frac{\eta_0}{2}, \eta_1\right)$ tot τ gairebé-període R comú a f i a φ i relatiu a ϵ_1 satisfà

$$|F(x + \tau), F(x)| \leq \epsilon,$$

i com que, segons el teorema III, el conjunt de gairebé-períodes R comuns a f i a φ relatiu a un nombre fix qualsevol formen un conjunt relativament dens, queda demostrat que F és una funció g. p. R.

Per uns raonaments semblants pot demostrar-se també:

TEOREMA VI. — *Sigui $f(x)$ una funció g. p. R i $\varphi(x)$ una funció g. p. de Bohr, per la qual existeix una constant C positiva que satisfà*

$$|\varphi(x)| \geq C;$$

llavors la funció $F(x) = f(x)\varphi(x)$ serà una funció g. p. R.

Aquests dos teoremes, juntament amb el teorema I, i tenint en compte que les constants finites poden ésser considerades com a funcions g. p. de Bohr, ens permetran afirmar que:

TEOREMA VII. — *Si $f(x)$ és g. p. R, també ho serà la*

$$F(x) = \frac{s_1 f(x) + s_2}{s_3 f(x) + s_4} \quad (s_1 s_4 - s_2 s_3 \neq 0),$$

on s_1, s_2, s_3 i s_4 són constants.

En efecte, si $s_3 = 0$, els teoremes V i VI donen immediatament el resultat desitjat. Si $s_3 \neq 0$, hom pot escriure

$$F(x) = \frac{s_1}{s_3} + \frac{s_2 - \frac{s_1 s_4}{s_3}}{s_3 f(x) + s_4}$$

els teoremes V i VI demostren que $s_3 f(x) + s_4$ és g. p. R; aplicant a aquesta funció el teorema I veiem que

$$F_1(x) = \frac{1}{s_3 f(x) + s_4}$$

és també g. p. R i, finalment, una nova aplicació dels teoremes V i VI ens permet demostrar, tal com volíem, que

$$F(x) = \frac{s_1}{s_3} + \left(s_2 - \frac{s_1 s_4}{s_3}\right) F_1(x)$$

és g. p. R.

4. Per l'estudi de les funcions g. p. de Bohr. S. Bochner⁵ introdueix la noció de funció normal; aquesta noció pot traslladar-se a la classe de les funcions de què ens estem ocupant, o millor dit, pot obtenir-se fàcilment la noció de funció normal R, que jugarà en l'estudi de les funcions g. p. R el mateix rol que la noció de funció normal juga en l'estudi de les g. p. de Bohr.

5. BOCHNER: *Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I. Teil. Funktionen einer Variable*, «Math. Annalen», XCVI (1927), 119-147.

DEFINICIÓ. — Una funció f contínua R en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$ serà dita funció normal R quan de tota successió $f(x + k_n)$ ($n=1, 2, \dots$), on k_n són nombres reals qualssevol, hom pot extreure una successió que convergeixi uniformement R en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$.

Amb aquesta definició hom pot enunciar:

TEOREMA VIII. — Tota funció $g. p. R$ és una funció normal R , i recíprocament.

La demostració d'aquest teorema no la donarem, puix quan tractem en el capítol III de les funcions doblement gairebé-periòdiques R o gairebé-el·líptiques, haurem de demostrar un resultat semblant i, com que la demostració d'aquell resultat és lleugerament més complicada que la del teorema VIII, aplicant aquella demostració quedarà demostrat sobradament aquest teorema.

5. De la mateixa manera que Bohr, podem definir, per tota funció $f(x)$ que sigui $g. p. R$, el conjunt $H_R(f(x+k))$ com a format per totes les funcions $f(x+k)$, on k designa una constant real qualsevol, i per totes les funcions límits d'aquestes, quan la convergència R vers aquestes funcions límits és uniforme en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$. Igual que per les funcions $g. p.$ de Bohr, aquest conjunt pot ésser format a partir d'una qualsevol de les seves funcions.

6. També podrien definir-se els conjunts perfectes (Ausgezeichnete) o majoritzables, però si volguéssim traslladar totes les nocions, que de les funcions $g. p.$ de Bohr poden estendre's a les funcions $g. p. R$, això ens portaria molt lluny i ens allunyaria del nostre objecte sense obtenir, però, cap avantatge, puix un cop enunciativa aquesta possibilitat és senzillíssim trobar les petites variacions que cal introduir en les demostracions usades per les funcions $g. p.$ de Bohr, a fi que aquestes siguin aplicables a les funcions $g. p. R$. No obstant, volem definir, per les funcions $g. p. R$, una noció apareguda per primera vegada, incidentalment, en un treball de Bohr, i que fou estudiada metòdicament per S. Bochner en el treball més amunt citat; es tracta de la noció de funció de la translació (Verschiebungsfunktionen) de $f(x)$, i la seva definició, per al cas que ens interessa, és la següent:

DEFINICIÓ. — Sigui $f(x)$ una funció qualsevol definida en tot l'interval $(-\infty, +\infty)$, la $e_t(\tau)$ funció de la translació R de $f(x)$ vindrà definida, en $-\infty < \tau < +\infty$, per la igualtat

$$e_t(\tau) = \text{fita sup}_{-\infty < x < +\infty} |f(x+\tau), f(x)|.$$

És evident que tota funció de la translació R satisfà les condicions

$$a) \quad \pi \geq e_t(\tau) \geq 0, \quad e_t(0) = 0,$$

$$b) \quad e_t(\tau) = e_t(-\tau),$$

$$c) \quad e_t(\tau_1 + \tau_2) \leq e_t(\tau_1) + e_t(\tau_2),$$

d'aquestes tres condicions se segueix que també serà satisfeta la

$$c_1) \quad |e_t(\tau_1 + \tau_2) - e_t(\tau_2)| \leq e_t(\tau_1).$$

Recíprocament, tota funció $e(\tau)$ que satisfà aquestes propietats és una funció de la translació R; en efecte, sigui $h(x)$ la funció definida per les propietats següents: $h(x)$ és sempre real i positiva, i satisfà

$$|h(\tau), 0| = e(\tau),$$

les propietats a), b) i c) ens permeten afirmar que

$$|h(x + \tau), h(x)| \leq |h(\tau), 0|,$$

i com sigui que, per $x=0$, la igualtat és satisfeta, resultarà

$$e_h(\tau) = e(\tau).$$

A més, la igualtat evident

$$\limsup_{-\infty < x < +\infty} |e_t(x + \tau) - e_t(x)| = \limsup_{-\infty < x < +\infty} |f(x + \tau), f(x)|,$$

demostra que, si $f(x)$ és una funció g. p. R, la seva funció de la translació R serà una funció g. p. de Bohr, i recíprocament; podem, doncs, enunciar el resultat:

TEOREMA IX. — *La condició necessària i suficient perquè una funció $e(\tau)$ sigui la funció de la translació R d'una funció g. p. R, és que $e(\tau)$ tingui les propietats a), b), c) i sigui una funció g. p. de Bohr.*

La major part de les propietats de les funcions de la translació definides per Bochner són també satisfetes per les nostres funcions de la translació R, com pot veure's fàcilment, molt més després d'haver seguit les demostracions contingudes en aquest capítol, on sobresurten clarament les modificacions que en elles cal introduir, en passar de les funcions g. p. de Bohr a les nostres funcions g. p. R.

7. Nota. — Abans de finalitzar aquest capítol volem demostrar, mitjançant un exemple, l'afirmació que hem fet, que no sempre la suma de dues funcions g. p. R és una funció g. p. R.

En efecte, sigui $f(x) = (\sin x)^{-2}$, evidentment aquesta funció és periòdica i, per tant, g. p. R, i pren el valor infinit en tot punt $x = n\pi$, on n és un enter.

Sigui 2^k la màxima potència entera de dos per la qual és divisible el nombre n , llavors direm que $x = n\pi$ és un punt del conjunt g_k . El punt $x = 0$ no pertany a cap d'aquests conjunts, però considerarem que forma part del conjunt g , format per aquest sol punt. Si x' pertany a g_k , en l'interval

$$x'_1 = x' - \frac{1}{k+2} < x < x' + \frac{1}{k+2} = x'_2,$$

la funció $\varphi(x)$ vindrà definida per

$$\varphi(x) = (k+2)^2 (x-x'_1)(x'_2-x).$$

i en tot punt que no pertany a cap d'aquests intervals donarem a $\varphi(x)$ el valor zero.

Si x es troba a una distància del conjunt $g + \sum_{k=k_1}^{\infty} g_k$ inferior a $\frac{1}{k_1+2}$ direm

que x pertany al conjunt e_{k_1} .

Sigui

$$F(x) = f(x) + \varphi(x).$$

Si x és un punt on $\varphi(x) = 0$, evidentment tindrem

$$|f(x), F(x)| = 0;$$

a més, podem trobar una successió ϵ_k tal que

$$\lim \epsilon_k = 0$$

i que, si x és interior a un interval corresponent a un punt de g_k , resulti

$$|f(x), F(x)| \leq \epsilon_k.$$

De tot això deduïm que, si n_1 és un nombre imparell i si x pertany al conjunt e_{k_1} ,

$$|F(x + n_1 2^{k_1} \pi), F(x)| \leq \epsilon_{k_1},$$

mentre que, si x no pertany al mateix conjunt, és a dir, no pertany a e_{k_1} , tindrem

$$|F(x + n_1 2^{k_1} \pi), F(x)| = 0,$$

per tant, $F(x)$ és una funció g. p. R. Sigui ara

$$f_1(x) = -f(x),$$

evidentment, la funció $f_1(x)$ és g. p. R, però la

$$f_1(x) + F(x) = \varphi(x)$$

no és g. p. R; puix, si x' és un punt de g_k , satisfà

$$\left| \varphi\left(x' + \frac{1}{k+2}\right), \varphi(x') \right| = \frac{\pi}{2}$$

i, en conseqüència, no és uniformement contínua R; per tant, tampoc no pot ésser g. p. R.

II

FUNCIONS MEROMORFES GAIREBÉ-PERIÒDIQUES R EN UNA FAIXA

8. Sigui $z = x + iy$ una variable complexa, quan parlarem de la faixa (a, b) entendrem que volem indicar el conjunt de punts z que satisfan

$$a < y < b.$$

Per dir que una propietat és satisfeta en tota faixa (a_1, b_1) interior a la faixa (a, b) , o sigui, que és satisfeta en $a_1 < y < b_1$ mentre

$$a < a_1 < b_1 < b,$$

ho indicarem dient que aquesta propietat té lloc en $[a, b]$. Les notacions $(a, b]$ i $[a, b)$ es comprenen fàcilment després del que acabem d'indicar.

DEFINICIÓ. — Una funció $f(z) = f(x + iy)$ meromorfa en la faixa (a, b) serà dita g. p. R en aquesta faixa si, a tot nombre ϵ positiu donat, però tan petit com es vulgui, es pot fer correspondre una llargada $l(f, \epsilon)$ tal que tot interval de llargada l situat sobre l'eix real conté almenys un gairebé-període R de f relatiu a ϵ , és a dir, un nombre τ tal que, en tota la faixa (a, b) , hom tingui

$$|f(z + \tau), f(z)| \leq \epsilon.$$

També aquesta definició pot expressar-se abreujadament, dient que una funció $f(z)$ meromorfa en la faixa (a, b) serà dita gairebé-periòdica R, en la mateixa faixa, si el conjunt dels gairebé-períodes R de f relatius a un ϵ donat qualsevol, és un conjunt relativament dens.

No cal insistir per comprendre el significat que donarem a l'expressió funció g. p. R en la faixa $[a, b]$.

9. **TEOREMA X.** — Tota funció g. p. R en una faixa $[a, b]$ és uniformement contínua R en la mateixa faixa $[a, b]$.

TEOREMA XI. — Siguin $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$; n funcions g. p. R en la faixa (a, b) , el conjunt dels gairebé-períodes R , comuns a aquestes n funcions i relatius a un ϵ donat qualsevol, és relativament dens.

TEOREMA XII. — La funció límit d'una successió uniformement convergent R en la faixa (a, b) de funcions g. p. R en la mateixa faixa, serà també una funció g. p. R en (a, b) .

DEFINICIÓ. — Una funció $f(z)$ meromorfa en la faixa (a, b) serà dita funció normal R en (a, b) si de tota successió $f(z + k_n)$, on k_n són nombres reals qualssevol, pot extreure-se'n una altra successió uniformement convergent R en la faixa (a, b) .

Amb aquesta definició podem enunciar:

TEOREMA XIII. — Tota funció normal R en la faixa (a, b) és una funció g. p. R en aquesta mateixa faixa, i reciprocament.

Les demostracions dels teoremes X, XI i XII són quasi idèntiques a les demostracions dels teoremes II, III i IV, quant a la demostració del teorema XIII, repetirem el que ja hem dit en parlar de la demostració del teorema corresponent del capítol I, és a dir, la deixarem per a quan demostrem un teorema semblant en el capítol III.

Amb tot i que la majoria dels resultats del capítol I corresponen també a propietats de les funcions g. p. R en una faixa, hem enunciat explícitament els teoremes X, XI, XII i XIII a títol d'exemples, i per la importància que alguns d'ells tenen per a la demostració dels teoremes que segueixen.

10. Representem per $\rho(a, b, k, h)$ el rectangle

$$a \leq y \leq b, \quad k \leq x < h.$$

Amb aquesta notació enunciaré:

TEOREMA XIV. — Siguí $f(z)$ una funció g. p. R no constant en la faixa (a, b) , qualssevol que siguin a_1 i b_1 amb tal que

$$a < a_1 < b_1 < b,$$

existirà una quantitat $C(a_1, b_1)$, que depèn únicament de a_1, b_1 i f , tal que el nombre de punts en què f pren el valor s en el rectangle

$$\rho(a_1, b_1, k, k+1)$$

és inferior a $C(a_1, b_1)$, qualssevol que siguin el valor de s i el valor de k .

Si el teorema no fos cert, existirien dos valors a_1 i b_1 i dues successions de valors s_n i k_n tals que, en el rectangle $\rho(a_1, b_1, k_n, k_n + 1)$, la funció $f(z)$ prendria més de n vegades el valor s_n .

Considerem, doncs, la successió

$$f_n(z) = f(z + k_n);$$

segons el teorema XIII aquesta successió és una família normal en el rectangle $\rho\left(\frac{a+a_1}{2}, \frac{b+b_1}{2}, -1, 2\right)$; com sigui que pot demostrar-se que, si $f(z)$ no és constant, tampoc no serà constant cap funció límit de les successions extretes de la successió $f_n(z)$, pels resultats clàssics de la teoria de las famílies normals, queda demostrat que, en el rectangle $\rho(a_1, b_1, 0, 1)$, el nombre de punts en què $f_n(z)$ pren el valor s_n no pot créixer indefinidament amb el valor de n . El teorema és, doncs, demostrat.

TEOREMA XV. — *Si en la faixa (a_1, b_1) , interior a (a, b) , existeix una successió de punts $k_n + i y_n$ tals que*

$$\lim f(k_n + i y_n) = s;$$

en tota faixa $(a_1 - \eta, b_1 + \eta)$ existeixen punts en els quals $f(z)$ pren el valor s .

En efecte, si f és constant el teorema és evident. En cas contrari, segons el teorema XIII, de la successió $f(z + k_n)$ pot extreure-se'n una successió uniformement convergent R en $(a_1 - \eta, b_1 + \eta)$; la funció límit d'aquesta successió prendrà en el punt $z_0 = i \lim y_n$ el valor s i, com sigui que aquesta funció límit no és constant, puix suposem que $f(z)$ no ho és, en tot entorn del punt z_0 la funció $f(z + k_n)$ prendrà, per n suficientment gran, almenys un cop el valor s .

COROL·LARI. — *Si $f(z)$ és holomorfa i g. p. R en $[a, b]$, serà g. p. de Bohr en la mateixa faixa $[a, b]$.*

TEOREMA XVI. — *Si la funció $f(z)$, g. p. R en la faixa (a, b) , pren el valor s en una faixa (a_1, b_1) , interior a (a, b) ; existeix una longitud $L(a_1, b_1, f)$ tal que, en tot rectangle*

$$\rho(a, b, k, k + L),$$

$f(z)$ pren el valor s .

Suposem, contràriament a allò que afirma el teorema, que existeix una successió de valors L_n creixent infinitament, i dues successions més k_n i s_n tals que $f(z)$ no pren el valor s_n en el rectangle $\rho(a, b, k_n, k_n + L_n)$, amb tot i que pren s_n en la faixa (a_1, b_1) .

Segons el teorema XIII podem suposar que la successió

$$f_n(z) = f\left(z + k_n + \frac{L_n}{2}\right)$$

és uniformement convergent R en (a, b) i que $\lim s_n = s_0$. Segons les propietats de les famílies normals pot demostrar-se que la funció $F(z)$, límit de la successió $f_n(z)$, no pren el valor s_0 en (a, b) , però per altra banda, segons la hipòtesi del teorema, existeix un punt z_n interior a (a_1, b_1) en el qual $f_n(z_n) = s_n$, per tant, tindrem

$$\lim F(z_n) = s_0,$$

i aplicant el teorema XIV veurem que F forçosament pren el valor s_0 en (a, b) ; queda, doncs, demostrat el teorema.

11. TEOREMA XVII. — *Sigui $f(z)$ una funció g. p. R, no constant, en $[a, b]$ i sigui (a_1, b_1) interior a (a, b) ; si rodegem tot punt de (a, b) , on $f(z) = s$, per un cercle de radi r centrat en aquest punt, llavors en qualsevol punt interior a (a_1, b_1) i exterior als cercles descrits serà satisfeta la*

$$|f(z), s| \geq m,$$

on m depèn únicament de r, a_1, b_1 i f .

Si el teorema no fos cert podria trobar-se una successió de valors complexos s_n i una successió de punts z_n interiors a (a_1, b_1) tals que

$$\lim f(z_n) = s_0 = \lim s_n,$$

i que la distància entre z_n i el punt més pròxim, on $f(z)$ pren el valor s_n , fos superior a r . Escriguem $z_n = x_n + i y_n$ i considerem la successió

$$f_n(z) = f(z + x_n),$$

una vegada més, segons el teorema XIII, podem suposar que la successió de les $f_n(z)$ és uniformement convergent R, i en conseqüència, la funció límit $F(z)$ verificarà

$$F(i y_0) = s_0 \quad (y_0 = \lim y_n).$$

A partir d'un valor de n , en el cercle de centre $i y_0$ i radi $\frac{r}{2}$, la funció $F(z)$

prendrà el valor s_n , per tant, podem afirmar que, per n suficientment gran, en el cercle de centre z_n i de radi r la funció $f(z)$ prendrà el valor s_n , contràriament a la definició de les successions z_n i s_n ; el teorema és, doncs, demostrat.

12. Considerem un valor $m < \frac{\pi}{2}$ i sigui $d(s, m)$ un domini en el qual

$$|f(z), s| < \frac{m}{2},$$

i a més, tal que, en tot punt de la frontera d'aquest domini,

$$|f(z), s| = \frac{m}{2}.$$

Hom pot demostrar que sempre a l'interior de $d(s, m)$ existeix, almenys, un punt on $f(z) = s$.

TEOREMA XVIII. — *Sigui τ un gairebé-període R de f relatiu a $\frac{m}{4}$ i $d(s, m)$ un domini dels definits anteriorment, i completament interior a (a, b) ; el nombre de punts on $f(z + \tau)$ pren el valor s a l'interior de $d(s, m)$, és igual al nombre de punts en els quals $f(z)$ pren el mateix valor s a l'interior del mateix $d(s, m)$.*

Demostració. — En primer lloc resulta fàcilment que el domini $d(s, m)$ està limitat per una o diferents corbes rectificables. Per simplificar suposarem que $|\infty, s| > m$ que sempre és possible; puix, en cas de no ésser satisfeta aquesta desigualtat, és suficient considerar $\frac{1}{f(z)}$ i $\frac{1}{s}$ en lloc de $f(z)$ i s , perquè ho sigui.

Segons un resultat sobradament conegut, el nombre de punts en què $f(z)$ pren el valor s en $d(s, m)$, és igual al nombre de voltes que $f(z)$ dona entorn del punt s , quan z descriu la frontera de $d(s, m)$; i el mateix per $f(z + \tau)$.

Com sigui que, per tot valor de z de la frontera de $d(s, m)$, els punts $f(z)$ i $f(z + \tau)$ són interiors a una eHipse (finita) que depèn de z i que no conté mai el punt s , el nombre de voltes que donarà el punt $f(z)$ entorn de s , quan z descriu la frontera de $d(s, m)$, serà igual al nombre de voltes que dona $f(z + \tau)$ entorn de s quan z descriu la frontera del mateix domini, puix aquests nombres de voltes han d'ésser enters, ja que $f(z)$ i $f(z + \tau)$ són uniformes en $d(s, m)$.

13. Sigui $f(z)$ una funció g. p. R en la faixa (a, b) , i representem per $N(a_1, b_1, k, k + T)$ el nombre de punts en què $f(z)$ pren el valor s en el rectangle $\rho(a_1, b_1, k, k + T)$. Amb aquesta notació pot enunciar-se:

TEOREMA XIX. — *Si la funció*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(a_1, b_1, 0, T)}{T},$$

que depèn de a_1 i de b_1 , és contínua en relació a aquestes dues quantitats, llavors l'expressió

$$\frac{N(a_1, b_1, 0, T)}{T}$$

tendeix a un límit, quan T augmenta indefinidament, i aquest límit és una funció contínua de a_1 i de b_1 .

Sigui (a', b') una faixa interior a (a, b) però que contingui en el seu interior la faixa (a_1, b_1) . Representarem per C_0 la quantitat $C(a', b')$ definida pel teorema XIV, seguint una demostració semblant a la de Favard⁶ per un resultat que, per les funcions g. p. de Bohr, és igual al teorema XIX que estem considerant, i aplicant els teoremes XIV, XVII i XVIII, arribarem a

$$\begin{aligned} N(a_1 + \eta, b_1 - \eta, \eta, T - \eta) - \left[l\left(f, \frac{m}{4}\right) + 1 \right] C_0 &\leq \\ &\leq N(a_1, b_1, nT, (n+1)T) \leq \\ &\leq N(a_1 - \eta, b_1 + \eta, -\eta, \eta + T) + \left[l\left(f, \frac{m}{4}\right) + 1 \right] C_0; \end{aligned}$$

i la demostració segueix a partir d'ací, exactament el mateix curs que la de Favard.

També pot demostrar-se fàcilment:

TEOREMA XX. — Amb les hipòtesis del teorema anterior la convergència de

$$\frac{N(a_1, b_1, k, k+T)}{T}$$

és uniforme en k , quan T augmenta indefinidament.

Després del que hem dit sobre la demostració del teorema XIX, és innecessari insistir sobre la demostració del teorema XX.

14. Passem ara a enunciar i demostrar un dels teoremes més interessants d'aquest capítol.

6. J. FAVARD: *Leçons sur les fonctions presque-périodiques* (Paris 1933). Els resultats corresponents als meus teoremes XIV, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX i XX, però aplicats a les funcions de Bohr, foren donats per FAVARD («Comptes Rendus Paris», CXCIV (1932), 1.614), i independentment per JESSEN («Math. Annalen», CVIII (1933), 485), si bé els cinc primers en forma menys precisa que la meua, en particular, no demostraven que $C(a_1, b_1)$, $L(a_1, b_1, f)$ i m , respectivament definits en els teoremes XIV, XVI i XVII, fossin independents de s .

TEOREMA XXI. — *Sigui $f(z)$ una funció g. p. R en $[a, b]$; sempre, en tota faixa (a_1, b_1) , interior a (a, b) , podrem representar $f(z)$ en la forma*

$$f(z) = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$$

on $\varphi_1(z)$ i $\varphi_2(z)$ són dues funcions g. p. de Bohr en (a_1, b_1) .

Per una transformació lineal de la variable z podem suposar, sense pèrdua de generalitat, que

$$a < -\frac{\pi}{2} < a_1 < b_1 < \frac{\pi}{2} < b;$$

i representem per B , B_1 i B' respectivament les faixes $[a, b]$, (a_1, b_1) i $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

sigui també z_n la successió de tots els pols de $f(z)$ interiors a B' , i escriguem

$$\Phi(z, z_n) = \frac{e^{z_n - z} - 1}{e^{z_n - z} + 1} \frac{e^{z_n - z} - i \frac{|y_n|}{|y_n|}}{e^{z_n - z} + i \frac{|y_n|}{|y_n|}} \quad (z_n = x_n + i y_n)$$

Evidentment, si z és en una faixa B' interior a B' , existeix una $C_1(B')$ tal que, qualsevol que sigui z_n ,

$$|\Phi(z, z_n)| \leq C_1;$$

a més, si D és suficientment gran, la desigualtat

$$|x - x_n| > D \quad (z = x + i y)$$

porta aparellada la

$$|\Phi(z, z_n) - 1| < 5e^{-D}.$$

Segons el teorema XIV, el nombre de pols de $f(z)$, interiors a un tros de B' la llargada del qual és la unitat, és inferior a una constant C' ; en conseqüència, la funció

$$\varphi_2(z) = \prod_n \Phi(z, z_n),$$

7. Aquest teorema permet demostrar per les funcions g. p. R un teorema semblant a la generalització de la fórmula de Jensen donada per JESSEN («Mat. Annalen», CVIII (1933), 485) per les funcions de Bohr. (Nota afegida durant la correcció de proves.)

on el producte s'estén a tots els pols de f interiors a B' , serà holomorfa i afitada en tota B' interior a B . Recordant un teorema clàssic de la teoria de les funcions g. p. de Bohr, resulta, doncs, que si aconseguim demostrar que $\varphi_2(x)$ és una funció g. p. de la variable real x , haurem demostrat que $\varphi_2(z)$ és g. p. en B' .

Donada una quantitat positiva η qualsevol, és possible trobar una llargada L tal que el producte

$$\psi_1(x) = \prod_n \Phi(x, z_n),$$

estès a una successió qualsevol de valors de n tals que

$$|x - x_n| > L,$$

verifiqui

$$|1 - \psi_1(x)| < \eta.$$

A més, les propietats de Φ permeten afirmar que és possible trobar una faixa B'' , interior a B' i que conté B_1 , tal que el producte

$$\psi_2(x) = \prod_n \Phi(x, z_n),$$

estès a una successió qualsevol dels z_n exteriors a B'' , verifica

$$|1 - \psi_2(x)| < \eta.$$

Ara bé, representem per q la distància entre la frontera de B' i la frontera de B'' ;

si entorn de cada punt z_n com a centre descrivim un cercle de radi $\frac{q}{8C'}$, cap cor-

ba, completament interior a aquests cercles, no podrà unir la frontera de B'' amb la frontera de B' , és a dir, no existirà cap cadena de cercles tals que partint d'un que tingui punts interiors a B'' pugui anar-se enllaçant amb altres cercles fins que s'arribi a un que tingui punts en comú amb la frontera de B' . Aquests cercles els anomenarem cercles λ .

Considerem ara el producte

$$\psi_3(x) = \prod_n \Phi(x, z_n)$$

estès a tots els z_n que, mitjançant corbes interiors als cercles suara definits, poden ésser units amb algun punt $z' = x' + iy'$ interior a B' i que verifica (z' pot variar amb z_n)

$$|x - x'| \leq L.$$

Els z_n no compresos en el ψ_3 , i que satisfan la

$$|x - x_n| > L.$$

seran els que suposem que formen el producte ψ_1 ; els restants seran els del producte ψ_2 . Si definim r_0 , com és possible, per la condició que, si els z_n que formen el ψ_3 varien de quantitats inferiors en mòdul a r_0 , el producte ψ_3 variï, qualsevol que sigui x , d'una quantitat inferior en mòdul a η , i si prenem la quantitat r que intervé en el teorema XVII tal que

$$r = \min \left[\frac{r_0}{C'}, \frac{q}{8 C'} \right]$$

representant per m la quantitat definida per aquest valor de r i en $\left(-\frac{\pi}{2} + r, \frac{\pi}{2} - r\right)$ segons el teorema últimament citat; podrem continuar la demostració de la següent forma.

Sigui τ un gairebé-període R de f relatiu a $\frac{m}{4}$ i definim $\psi_1^1(x)$, $\psi_2^1(x)$ i $\psi_3^1(x)$, com hem definit els ψ_1 , ψ_2 i ψ_3 , però a partir dels $z_n - \tau$ en lloc de partir dels z_n ; però efectuant el repartiment utilitzant els mateixos cercles λ (centrats en els z_n), evidentment resultarà

$$|\psi_1(x) - \psi_1^1(x)| < 2\eta, \quad |\psi_2(x) - \psi_2^1(x)| < 2\eta.$$

Donat que, en tot $d(\infty, m)$ completament interior a B' el nombre de punts z_n és igual, segons el teorema XVIII, al nombre de punts $z_n - \tau$, i ja que $d(\infty, m)$ pot ésser inclòs en un cercle de radi r_0 , tindrem

$$|\psi_3(x) - \psi_3^1(x)| < \eta,$$

i com sigui que, segons pot demostrar-se,

$$|\psi_1(x)| < 1, \quad |\psi_2(x)| < 1, \quad |\psi_3(x)| < 1;$$

tenint en compte que $\Phi(z + \tau, z_n) = \Phi(z, z_n - \tau)$ i, per tant, que

$$\varphi_2(x + \tau) = \psi_1^1(x) \psi_2^1(x) \psi_3^1(x),$$

de tot això resulta

$$|\varphi_2(x + \tau) - \varphi_2(x)| < 17\eta;$$

en conseqüència, $\varphi_2(z)$ és g. p. en B' . Considerem ara z interior a la faixa B' , però exterior als cercles de radi r_1 que tenen per centres els punts z_n ; en aquest domini evidentment $f(z)$ serà holomorfa i a més, segons el teorema XVII i les propietats de $\varphi_2(z)$, existirà una constant M tal que, per aquests valors de z ,

$$|f(z)| \leq M, \quad |\varphi_2(z)| \leq M.$$

És fàcil trobar un η_0 tal que, si z continua essent interior al domini tot just definit i τ un gairebé-període de f relatiu a η_0 , siguin vàlides

$$|f(z + \tau) - f(z)| \leq \frac{\epsilon}{2M} \quad |v_2(z + \tau) - v_2(z)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

i posant $v_1(z) = v_2(z)f(z)$, resultarà en el mateix domini

$$|v_1(z + \tau) - v_1(z)| \leq \epsilon;$$

com sigui que hom pot suposar que r_1 és suficientment petit perquè no existeixi cap cadena de cercles que tenint punts interiors a B_1 tingui punts en comú amb la frontera de B' , resultarà, ja que $v_1(z)$ és holomorfa en B' , que aquesta funció és g. p. en B_1 .

15. Quan $a = -\infty$ i $b = +\infty$ poden presentar-se, com sempre, dos casos: el primer en què $f(z)$ és g. p. R en la faixa $[-\infty, +\infty]$, i el segon en què $f(z)$ és g. p. R en la faixa $(-\infty, +\infty)$, en aquest últim cas direm que $f(z)$ és g. p. R en tot el pla i segons la direcció de l'eix real, o segons la direcció 0.

La diferència entre aquests dos casos és força important, puix mentre són coneguts molts exemples de funcions g. p. de Bohr en $[-\infty, +\infty]$, anem a demostrar que

TEOREMA XXII. — *Tota funció $f(z)$, que sigui g. p. de Bohr en $(-\infty, +\infty)$, és periòdica.*

En efecte, sigui τ un gairebé-període de f relatiu a ϵ , la desigualtat

$$|f(z + \tau) - f(z)| \leq \epsilon,$$

en ésser satisfeta en tot el pla, imposa que la diferència

$$f(z + \tau) - f(z)$$

sigui una constant s . Aquesta constant, però, no pot tenir altre valor que 0, puix $f(z)$ és evidentment g. p. en una faixa (a, b) qualsevol i, segons un resultat de Bohr, serà també afitada en aquesta mateixa faixa; però si fos satisfeta la

$$f(z + \tau) - f(z) = s \neq 0$$

$f(z)$ no podria ésser afitada en cap faixa, ja que

$$f(n\tau) = f(0) + ns.$$

Per contra existeixen funcions g. p. R en tot el pla que no són periòdiques.

Finalment, si $f(ze^{i\alpha})$, considerada com a funció de z , és g. p. R en tot el pla i segons la direcció 0, direm que $f(z)$ és g. p. R en tot el pla i segons la direcció α .

III

FUNCIONS DOBLEMENT GAIREBÉ-PERIÒDIQUES R O FUNCIONS GAIREBÉ-EL·LÍPTIQUES

16. DEFINICIÓ. — *Una funció g. p. R en tot el pla i segons dues direccions (que no siguin oposades) serà dita funció doblement g. p. R, o funció gairebé-el·líptica (abreujadament funció g. e.).*

Seguidament anem a demostrar, per les funcions g. e., un teorema que correspon als teoremes II i X; per la utilitat que té per a demostrar els teoremes següents, i pel fet que la seva demostració és lleugerament menys fàcil que la del teorema II, donarem la demostració d'aquest teorema, contràriament al que hem fet en el cas del teorema X.

TEOREMA XXIII. — *Tota funció g. e. és uniformement contínua R en tot el pla complex.*

En efecte, siguin 0 i α les direccions en què $f(z)$ és g. p. R, i siguin $l(\epsilon, 0)$ i $l(\epsilon, \alpha)$ els intervals d'inclusió relatius a ϵ i corresponents a les direccions 0 i α respectivament. Representem per Δ el paral·lelogram que té per vèrtexs els punts

$$0, \quad l\left(\frac{\epsilon}{5}, 0\right), \quad l\left(\frac{\epsilon}{5}, \alpha\right) e^{i\alpha}, \quad l\left(\frac{\epsilon}{5}, 0\right) + l\left(\frac{\epsilon}{5}, \alpha\right) e^{i\alpha}.$$

La continuïtat R de $f(z)$ ens permet determinar un η tal que, si z és interior a Δ i

$$|z - z_1| < \eta,$$

resulti forçosament

$$|f(z), f(z_1)| \leq \frac{\epsilon}{5}.$$

Per altra banda, qualsevol que sigui z' és possible sempre trobar un $\tau_1 = \tau\left(\frac{\epsilon}{5}, 0\right)$

gairebé-període R de f relatiu a $\frac{\epsilon}{5}$ i segons la direcció 0 i un $\tau_2 = \tau\left(\frac{\epsilon}{5}, \alpha\right)$ gaire-

bé-període R de f relatiu a $\frac{\epsilon}{5}$ i segons la direcció α , de manera que

$$z' - \tau_1 - \tau_2 e^{i\alpha}$$

sigui interior a Δ ; per tant, si

$$|z' - z'_1| < \eta,$$

resultarà

$$\begin{aligned} |f(z'), f(z'_1)| &\leq |f(z'), f(z' - \tau_1)| + |f(z' - \tau_1), f(z' - \tau_1 - \tau_2 e^{i\alpha})| + \\ &\quad + |f(z' - \tau_1 - \tau_2 e^{i\alpha}), f(z'_1 - \tau_1 - \tau_2 e^{i\alpha})| + \\ &\quad + |f(z'_1 - \tau_1 - \tau_2 e^{i\alpha}), f(z'_1 - \tau_1)| + |f(z'_1 - \tau_1), f(z'_1)| \leq 5 \frac{\epsilon}{5} = \epsilon \end{aligned}$$

També pot demostrar-se el resultat següent:

TEOREMA XXIV. — *La funció límit d'una successió uniformement convergent R en tot el pla i formada per funcions g. e. és també una funció g. e.*

Després de la demostració del teorema anterior i la del teorema IV, seria sobrerera tota explicació; si bé, amb els nostres coneixements actuals, caldria imposar la condició que totes les funcions de la successió tinguin les mateixes direccions de gairebé-periodicitat R , però més endavant veurem que és innecessària.

La majoria dels teoremes dels capítols anteriors tenen els seus corresponents per les funcions g. e. i durant el transcurs d'aquest capítol en veurem d'altres exemples; però, la nostra intenció principal, en aquest capítol, és fer ressortir les semblances entre les funcions el·líptiques i les funcions g. e. que hem definit. Abans d'entrar en aquest tema, és obligat donar algunes proposicions i definicions preliminars.

17. DEFINICIÓ. — *Sigui $f(z)$ una funció meromorfa en tot el pla; si donada una successió qualsevol de valors complexos s_n sempre és possible extreure de la successió*

$$f(z + s_1), f(z + s_2), \dots, f(z + s_n), \dots$$

una successió uniformement convergent R en tot el pla, direm que $f(z)$ és normal R .

Amb aquesta definició, enunciem el teorema de la demostració del qual hem parlat ja, quan diguérem que la seva demostració porta aparellada la dels teoremes VIII i XIII.

TEOREMA XXV. — *Tota funció g. e. és normal R i, recíprocament, tota funció normal R és una funció g. e.*

Demostració.— En primer lloc començarem per demostrar la primera part del teorema, o sigui, que tota funció g. e. és normal R. Sigui s_n una successió qualsevol de nombres complexos i suposem que la funció $f(z)$ té com a direccions de gairebé-periodicitat R les direccions 0 i $\alpha \neq 0, \pi$; escriguem

$$s_n = k_n + h_n e^{i\alpha},$$

on k_n i h_n són reals, i representem per $\Delta(\epsilon)$ el paral·lelogram de vèrtexs

$$0, \quad l(\epsilon, 0), \quad l(\epsilon, \alpha) e^{i\alpha}, \quad l(\epsilon, 0) + l(\epsilon, \alpha) e^{i\alpha}.$$

Evidentment sempre serà possible trobar dues successions $\tau_n(\epsilon, 0)$ i $\tau_n(\epsilon, \alpha)$ tals que

$$0 \leq k_n - \tau_n(\epsilon, 0) < l(\epsilon, 0), \quad 0 \leq h_n - \tau_n(\epsilon, \alpha) < l(\epsilon, \alpha),$$

és a dir, el punt

$$z_n = s_n - \tau_n(\epsilon, 0) - \tau_n(\epsilon, \alpha) e^{i\alpha}$$

és interior a $\Delta(\epsilon)$; per tant, podrem extreure de la successió dels z_n una altra que tendeixi vers un límit z_0 (nosaltres continuarem representant aquesta successió parcial per z_n , puix que no pot haver-hi cap confusió). Com que a més

$$|f(z + s_n), f(z + z_n)| \leq 2\epsilon,$$

a partir d'un valor de n tindrem, tenint en compte el teorema XXIII,

$$|f(z + s_n), f(z + z_0)| \leq 3\epsilon$$

i finalment, per $n > N$ i $m > N$,

$$(1) \quad |f(z + s_n), f(z + s_m)| \leq 6\epsilon.$$

Per tant, de la successió primitiva n'hem extret una successió que satisfà la desigualtat (1) i, com sigui que ϵ és arbitrària, d'aquesta última successió en podrem extreure una de nova que satisfarà la desigualtat (1) en la qual hàgim

substituït ϵ per $\frac{\epsilon}{2}$, i d'aquesta una altra en la qual ϵ serà substituïda per $\frac{\epsilon}{3}$

i així successivament; la successió diagonal, de totes aquestes successions, convergirà uniformement R en tot el pla. Com sigui que la successió primitiva era arbitrària, això demostra que $f(z)$ és normal R.

Demostrem la segona part del teorema; començarem per comprovar que si $f(z)$ és una funció normal R, serà g. p. R en tot el pla i segons la direcció 0. Si $f(z)$ no fos g. p. R en tot el pla i segons la direcció 0, seria possible trobar

un ϵ i una successió d'interval·ls $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$ situats en l'eix real i de llargades $l_1, l_2, \dots, l_n, \dots$ que augmenten indefinidament, i tals que en cap interval L_n no existeix cap gairebé-període R de f relatiu a ϵ .

Prenem la quantitat k_1 arbitràriament, però determinem la k_2 de forma que $k_2 - k_1$ sigui un punt interior a L_1 ; seguidament elegim n_2 de manera que $l_{n_2} > |k_2 - k_1|$ i k_3 tal que $k_3 - k_1$ i $k_3 - k_2$ siguin interiors a L_{n_2} . Suposem que

ja hàgim determinat l'interval L_{n_v} i el valor k_{v+1} , aleshores continuarem de la següent forma: determinarem n_{v+1} per

$$l_{n_{v+1}} > \max [|k_{v+1} - k_1|, \dots, |k_{v+1} - k_v|, |k_v - k_1|, \dots, |k_2 - k_1|]$$

i k_{v+2} de manera que $k_{v+2} - k_{v+1}, k_{v+2} - k_v, \dots, k_{v+2} - k_1$ siguin interiors a $L_{n_{v+1}}$. Les propietats dels interval·ls L_n ens permeten demostrar que, qualssevol

que siguin els enters positius v_1 i v_2 , el valor $k_{v_1} - k_{v_2}$ no és mai un gairebé-període R relatiu a ϵ , o sigui que

$$\text{fita sup. } |f(z + k_{v_1}), f(z + k_{v_2})| > \epsilon.$$

Per tant, de la successió $f(z + k_v)$, no pot extreure-se'n cap successió que convergeixi uniformement R en tot el pla; en conseqüència, si $f(z)$ no fos g. p. R en tot el pla i segons la direcció 0, tampoc no seria normal R .

Com sigui que la demostració que hem donat per la direcció 0, pot ésser repetida per una direcció α qualsevol, el teorema és demostrat en totes les seves parts. Aquesta demostració també permet afirmar que:

TEOREMA XXVI. — *Tota funció g. e. és també g. p. R en tot el pla i segons totes les direccions.*

La demostració anterior l'hem donada extensament, amb tot i que és una demostració ja clàssica en la teoria de les funcions g. p. de Bohr, i en ella tan sols hem hagut de canviar les diferències entre els valors de la funció per les distàncies esfèriques entre aquests mateixos valors, però la importància del teorema XIII i del XXV, ha fet que hàgim cregut que no era inútil repetir-la.

Ja que tota funció eHíptica és evidentment inclosa en la classe de les funcions g. e., el teorema XXVI ens permet afirmar que les funcions eHíptiques són g. p. R segons totes les direccions. A més, el teorema XXVI també ens permet, en estudiar les funcions g. e., prendre per direccions de gairebé-periodicitat R la direcció de l'eix real i la direcció de l'eix imaginari. És això el que farem d'ara endavant.

18. El primer teorema que fa ressortir la semblança entre les propietats de les funcions g. e. i las propietats de les funcions eHíptiques, és el primer teorema

de Liouville. Aquest teorema que fou demostrat per Liouville per a la subclasse de las funcions el·líptiques, és vàlid així mateix per a la totalitat de la classe de les funcions g. e., és a dir, podem afirmar:

TEOREMA XXVII. — *Tota funció entera g. e. és constant.*

En efecte, sigui $f(z)$ una funció g. e. no constant; evidentment, tant si és entera com si és meromorfa, serà possible trobar una successió de punts z_n tals que

$$\lim f(z_n) = \infty.$$

Segons el teorema XXV, de la successió $f(z + z_n)$ es pot extreure una successió uniformement convergent R en tot el pla; per tant, la seva funció límit, $F(z)$, serà una funció meromorfa que en el punt $z = 0$ tindrà un pol; en conseqüència, a partir d'un valor de n , la funció $f(z + z_n)$ tindrà almenys un pol en un entorn del punt $z = 0$; per tant, la funció $f(z)$ no és entera.

19. Representem per q_z el quadrat de vèrtexs

$$z, \quad z + 1, \quad z + i, \quad z + 1 + i.$$

Amb aquesta notació podrem demostrar un teorema, per les funcions g. e., que correspon al teorema XIV de les funcions g. p. R en una faixa.

TEOREMA XXVIII. — *Sigui $f(z)$ una funció g. e. no constant; qualssevol que siguin z_1 i s , el nombre de punts, interiors a q_{z_1} en què $f(z)$ pren el valor s , és menor que una quantitat C_0 que depèn solament de f .*

Amb petites variacions, i utilitzant en lloc del teorema XIII el teorema XXV, la línia de demostració d'aquest teorema és la mateixa que la del teorema XIV.

20. TEOREMA XXIX. — *Rodegem els punts on la funció $f(z)$, que és g. e. i no constant, pren el valor s , per cercles, centrats en aquests punts, de radi r ; en tot punt exterior a aquests cercles serà satisfeta la*

$$|f(z), s| > m,$$

on m depèn tan sols de r i de f .

La demostració segueix un camí semblant a la del teorema XVII; amb tot, donada la importància pel que segueix del teorema XXIX, donarem la seva demostració, si bé en forma abreujada. Si el teorema no fos cert, existirien dues successions z_n i s_n tals que $\lim f(z_n) = s_0 = \lim s_n$ i que la distància menor entre z_n i un punt on f pren el valor s_n , seria superior a r .

Segons el teorema XXV, de la $f(z + z_n)$ pot extreure-se'n una successió uniformement convergent R vers una funció meromorfa $F(z)$, que satisfarà

$$F(0) = s_0,$$

per tant, en un entorn de l'origen, i per n suficientment gran, la funció $F(z)$ prendrà el valor s_n , i d'ací se segueix que en un entorn doble de l'origen, $f(z + z_n)$ prendrà també el valor s_n . Com sigui que l'entorn de què hem parlat és arbitràriament petit, això demostra que és impossible l'existència de les z_n i les s_n amb les propietats que hem suposat que tenien.

21. Igual que en el núm. 12 podem definir els dominis $d(s, m)$ en els quals

$$|f(z), s| < \frac{m}{2}$$

i tals que, en la frontera d'ells, es compleixi

$$|f(z), s| = \frac{m}{2}$$

TEOREMA XXX. — *Sigui $f(z)$ una funció g. e.; el nombre de punts, interiors a un $d(s, m)$, on*

$$f\left[z + \tau\left(\frac{m}{8}, 0\right) + i\tau\left(\frac{m}{8}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

pren el valor s , és igual al nombre de punts, interiors al mateix $d(s, m)$, en que $f(z)$ pren el mateix valor.

El significat de les notacions $\tau(s, \alpha)$ ha estat explicat en el núm. 16. La demostració d'aquest teorema és idèntica a la del teorema XVIII.

22. Representem per $N(z, T, T', s)$ el nombre de punts, interiors al rectangle de vèrtexs

$$z, \quad z + T, \quad z + iT', \quad z + T + iT',$$

en què $f(z)$ pren el valor s .

TEOREMA XXXI. — *Sempre existeix el*

$$\lim_{T, T' = \infty} \frac{N(z, T, T', s)}{TT'}$$

i la convergència vers el límit és uniforme respecte a z i respecte a s .

En efecte, en primer lloc tenim

$$N(z, nT, n'T', s) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k'=0}^{n'-1} N(z + kT + ik'T', T, T', s).$$

A més, qualssevol que siguin k i k' , podrem trobar $\tau_k \left(\frac{m}{8}, 0 \right)$ i $\tau_{k'} \left(\frac{m}{8}, \frac{\pi}{2} \right)$ tals que

$$0 \leq kT - \tau_k \left(\frac{m}{8}, 0 \right) < l \left(\frac{m}{8}, 0 \right)$$

$$0 \leq k'T' - \tau_{k'} \left(\frac{m}{8}, \frac{\pi}{2} \right) < l \left(\frac{m}{8}, \frac{\pi}{2} \right)$$

Si m és suficientment petita podrem demostrar, aplicant els teoremes XXVIII i XXX, que

$$\begin{aligned} & |N(z + kT + ik'T', T, T', s) - N(z, T, T', s)| < \\ & < C_0 \left((T+1) \left[l \left(\frac{m}{8}, \frac{\pi}{2} \right) + 3 \right] + (T'+1) \left[l \left(\frac{m}{8}, 0 \right) + 3 \right] \right) = \\ & = C(m)T + C_1(m)T' + C_2(m). \end{aligned}$$

De tot això se segueix que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{N(z, nT, n'T', s)}{nTn'T'} - \frac{N(z, T, T', s)}{TT'} \right| < \\ & < \frac{C(m)}{T'} + \frac{C_1(m)}{T} + \frac{C_2(m)}{TT'} \end{aligned}$$

Suposant que

$$nT \leq T_1 < (n+1)T, \quad n'T' \leq T'_1 < (n'+1)T',$$

del teorema XXVIII, resultarà

$$\begin{aligned} & |N(z, T_1, T'_1, s) - N(z, nT, n'T', s)| < \\ & < C_0 [(nT+1)(T'+1) + (n'T'+1)(T+1) + (T+1)(T'+1)] \end{aligned}$$

i, en conseqüència,

$$(2) \quad \left| \frac{N(z, T_1, T'_1, s)}{T_1 T'_1} - \frac{N(z, nT, n'T', s)}{nT n'T'} \right| < \\ < C_0 \left[\frac{(n+1)(n'+1) - nn'}{nn'} \frac{n'T' + 1}{n'T'} \frac{nT + 1}{nT} + \right. \\ \left. + \frac{(nT + 1)(T' + 1) + (n'T' + 1)(T + 1) + (T + 1)(T' + 1)}{nT n'T'} \right]$$

Ara bé, si determinem un t_0 tal que

$$\frac{C(m)}{t_0} + \frac{C_1(m)}{t_0} + \frac{C_2(m)}{t_0^2} < \frac{\epsilon}{4},$$

i si posem

$$T = T' = t_0,$$

podrem trobar un n_0 tal que, si

$$n \geq n_0, \quad n' \geq n_0,$$

el segon membre de (2) sigui menor que $\frac{\epsilon}{4}$. Per tant, donades quatre quantitats

$$T_1 > n_0 t_0, \quad T'_1 > n_0 t_0, \quad T_2 > n_0 t_0, \quad T'_2 > n_0 t_0,$$

serà satisfeta la

$$\left| \frac{N(z, T_1, T'_1, s)}{T_1 T'_1} - \frac{N(z, T_2, T'_2, s)}{T_2 T'_2} \right| < \epsilon,$$

i com sigui que n_0 i t_0 són independents de z i de s , el teorema queda demostrat.

23. Enunciarem i demostrarem ara un teorema que és quasi idèntic a un altre de la teoria de les funcions el·líptiques.

TEOREMA XXXII. — *Siguin $f_1(z)$ i $f_2(z)$ dues funcions g. e. que tinguin en tot el pla els mateixos pols amb les mateixes parts principals; la diferència*

$$f_1(z) - f_2(z)$$

és una constant.

Si la suma de dues funcions g. p. R fos una funció g. p. R, aquest teorema seria conseqüència immediata del teorema XXVII; però, com que aquella afirmació no és sempre certa, haurem de buscar una altra demostració prenent peu en els teoremes XXVIII i XXIX. Rodegem cada pol de $f_1(z)$ (que també és un pol de $f_2(z)$ i reciprocament) per un cercle centrat en aquest pol i de radi $r < \frac{1}{2C_0}$; evidentment aquests cercles podran estar entrellaçats, però formant grups, i cada grup de cercles entrellaçats no podrà contenir més de C_0 cercles (teorema XXVIII).

Segons el teorema XXIX, a l'exterior d'aquests cercles seran satisfetes les desigualtats

$$|f_1(z), \infty| \geq m, \quad |f_2(z), \infty| \geq m,$$

on m és una quantitat positiva; aquestes dues desigualtats poden així mateix escriure's en la forma

$$|f_1(z)| \leq M, \quad |f_2(z)| \leq M,$$

on M depèn tan sols de m , per tant,

$$(3) \quad |f_1(z) - f_2(z)| \leq 2M.$$

Com que cada grup de cercles forma un domini aïtat, rodejat per punts on la desigualtat (3) és satisfeta, i a més, segons les hipòtesis del teorema, $f_1(z) - f_2(z)$ és holomorfa en tot el pla, la desigualtat (3) serà satisfeta també a l'interior dels cercles repetidament indicats i, per tant, també serà satisfeta en tot el pla; i segons un resultat clàssic, la funció entera $f_1(z) - f_2(z)$ és una constant.

TEOREMA XXXIII. — Si $f_1(z)$ i $f_2(z)$ són dues funcions g. e. que tenen els mateixos pols i els mateixos zeros (amb iguals ordres de multiplicitat, tant pels pols com pels zeros) llavors

$$f_1(z) = s f_2(z)$$

on s és una constant.

La demostració d'aquest teorema és igual, en línies generals, a la de l'anterior; però cal rodejar, a més dels pols, els zeros de les funcions i prendre el radi

$$r = \frac{1}{4C_0}$$

24. Sigui $\beta(D)$ la suma dels residus dels pols de $f(z)$ interiors al domini D ; amb aquesta notació podem enunciar el teorema següent, que correspon en la teoria de les funcions g. e. al segon teorema de Liouville de la teoria de les funcions elíptiques:

TEOREMA XXXIV. — Si $f(z)$ és una funció g. e., donals $\epsilon > 0$ i $r_0 > 0$ qualssevol, existeix un conjunt $E_1(\epsilon, r_0)$ relativament dens en l'eix real, i un conjunt $E_2(\epsilon, r_0)$ relativament dens en l'eix imaginari, tals que, per τ_1 pertanyent a E_1 i $i\tau_2$ pertanyent a E_2 , resulta

$$|\beta(\Delta)| < \epsilon(|\tau_1| + |\tau_2|),$$

on Δ és un domini tal que tot punt de la seva frontera es troba a una distància inferior a r_0 de la frontera del rectangle de vèrtexs

$$z_0, \quad z_0 + \tau_1, \quad z_0 + i\tau_2, \quad z_0 + \tau_1 + i\tau_2,$$

i, recíprocament, qualsevol punt de la frontera d'aquest rectangle es troba a una distància inferior a r_0 de la frontera de Δ ; el resultat és vàlid qualsevol que sigui z_0 .

Novament rodegem els pols de $f(z)$ per cercles λ centrats en ells i de radi r ; suposant $r < \frac{1}{2C_0}$ és fàcil demostrar que aquests petits cercles solament poden estar entrellaçats formant grups que contenen com a màxim C_0 cercles.

Segui ω un interval de l'eix real exterior als cercles λ i que a partir d'ell es pot descriure una corba contínua exterior als repetits cercles λ i que tendeixi a l'infinit. Suposem que ω tingui la màxima llargada compatible amb la condició que no tingui punts interiors als λ . Unint alguns (en nombre finit o infinit) dels intervals amb les propietats de ω per mitjà d'arcs dels λ , podrem obtenir una corba L que vagi de $x = -\infty$ a $x = +\infty$ i que tindrà les següents propietats:

1.ª Si z i z' són dos punts d'aquesta corba tals que $|z - z'| > 1$, la llargada $L(z, z')$ del tros d'aquesta corba comprès entre z i z' , verificarà

$$L(z, z') < |z - z'| (1 + 8\pi C_0 r)$$

suposant $r \leq \frac{1}{4C_0}$.

2.ª En tot punt z de L serà satisfeta la

$$|f(z), \infty| \geq m,$$

on m és el valor que segons el teorema XXVIII correspon a r .

Si en lloc de l'eix real utilitzem l'eix imaginari obtindrem una corba L' que tindrà les mateixes propietats que L i amb el mateix valor de m , ja que aquest solament depèn de r .

Ara bé, seguint la corba L en un sentit determinat trobarem un primer punt z' de contacte amb L' i un punt z'' que serà l'últim punt de contacte entre L i L' . Substituint l'arc de L que uneix z' amb z'' per l'arc de L' que uneix aquests ma-

teixos punts, la corba L es transformarà en una corba L_1 per a la qual la propietat 2.^a de L continua essent vàlida mentre que la 1.^a es transforma en la següent:

1.^a₁ Si z i z' són dos punts de L_1 tals que $|z - z'| > 1$, la llargada $L_1(z, z')$ del tros de L_1 comprès entre z i z' , verificarà

$$L_1(z, z') < |z - z'| (1 + 8\pi C_0 r) + 8C_0 r + 4\pi C_0 r < |z - z'| (1 + 15\pi C_0 r)$$

Evidentment, la L' satisfà a fortiori a la 1.^a₁. Per tant, tenim dues corbes L_1 i L' que satisfan les propietats 1.^a₁ i 2.^a i que tenen un arc en comú. Fàcilment pot veure's, doncs, que variant lleugerament L' podrem demostrar l'existència de dues corbes L_1 i L'_1 que tenen un sol punt z_1 en comú, i que verifiquen la condició 1.^a₁ i que en tot punt z situat en una d'elles es compleix la desigualtat

$$|f(z), \infty| > \frac{m}{2}.$$

Sigui $\eta < \frac{m}{8}$ un nombre positiu que de moment deixarem indeterminat, i siguin $\tau_1 = \tau(\eta, 0)$ i $\tau_2 = \tau(\eta, \pi/2)$ dos gairebé-períodes tals que

$$(4) \quad |\tau_1| > 1 \quad |\tau_2| > 1$$

D'ara endavant, la corba $\Lambda + \tau$ representarà la corba descrita pel punt $z + \tau$ quan z descriu Λ

Evidentment, si

$$r \leq \frac{1}{9C}$$

les corbes L_1 i $L_1 + \tau_1$ tindran en comú un punt $z_2 = x_2$ sobre l'eix real, tal que

$$\frac{1}{4} < x_2 < \frac{3}{4};$$

seguint, doncs, L_1 de z_1 a z_2 i $L_1 + \tau_1$ de z_2 fins a $z_3 = z_1 + \tau_1$, haurem descrit un segment que representarem per L_2 . De la mateixa manera pot definir-se un segment de corba que vagi de z_1 a $z_1 + i\tau_2$ i que anomenarem L'_2 .

Sigui Δ el domini interior a la corba tancada formada per la reunió de L_2 , $L'_2 + \tau_1$, $L_2 + i\tau_2$ i L'_2 ; aquesta corba tancada la representarem per Λ i sobre ella serà satisfeta la

$$|f(z), \infty| > \frac{m}{4}.$$

Donada $\eta_1 > 0$ és possible determinar η de manera que les desigualtats

$$|f(z), \infty| > \frac{m}{4}, \quad |f(z), f(z')| < \eta$$

tinguin com a conseqüència

$$|f(z) - f(z')| < \eta_1$$

Per tant, resultarà finalment

$$\begin{aligned} |\beta(\Delta)| &= \left| \int_{\Lambda} f(z) dz \right| \leq \left| \int_{L_1} (f(z) - f(z + i\tau_2)) dz \right| + \\ &+ \left| \int_{L_1} (f(z + \tau_1) - f(z)) dz \right| < \eta_1 (|\tau_1| + |\tau_2|) (1 + 15\pi C_0 r). \end{aligned}$$

Ara bé, si prenem

$$r = \frac{1}{C_0} \min \left(\frac{1}{9}, \frac{r_0}{2} \right),$$

m quedarà totalment determinada i tot punt de la frontera Λ de Δ estarà a una distància inferior a r_0 de la frontera del rectangle de vèrtexs

$$0, \quad \tau_1, \quad i\tau_2, \quad \tau_1 + i\tau_2$$

i reciprocament, tot punt de la frontera d'aquest rectangle estarà a una distància inferior a r_0 de Λ . En conseqüència, si determinem η_1 per la condició

$$7\eta_1 = \epsilon,$$

el valor de η quedarà també determinat, i únicament dependrà de r i de ϵ , i els valors de $\tau(\eta, 0)$ i $i\tau\left(\eta, \frac{\pi}{2}\right)$ que satisfan (4), formaran dos conjunts $E_1(\epsilon, r_0)$ i $E_2(\epsilon, r_0)$ relativament densos en l'eix real i en l'eix imaginari i que depenen únicament de r i de ϵ .

A més, el valor pres per η_1 demostra que

$$(5) \quad |\beta(\Delta)| < \epsilon (|\tau_1| + |\tau_2|).$$

Això demostra el teorema en el cas $z_0 = 0$, però si en lloc d'obtenir L_1 i L_2 a partir de l'eix real i de l'eix imaginari les obtenim a partir de les paral·leles a aquests eixos que passen per z_0 , com que podrem prendre r independent de z_0 ,

els conjunts $E_1(\epsilon, r_0)$ i $E_2(\epsilon, r_0)$ seran també independents de z_0 ; queda, doncs, demostrat el teorema.

COROL·LARI. — *Una funció $f(z)$ que sigui g. e. no pot tenir el mateix residu $a_0 \neq 0$ en tots els seus pols.*

En efecte, si la funció $f(z)$ tingués el mateix residu a_0 en tots els seus pols, el teorema XXX ens permetria demostrar fàcilment que si τ_1 i τ_2 són suficientment grans

$$|\beta(\Delta)| > \theta |a_0| |\tau_1 \tau_2| \quad (\theta > 0)$$

i de (5) $|a_0| = 0$.

25. El tercer teorema de Liouville, per les funcions el·líptiques, té també el seu corresponent en la teoria de les funcions g. e. que estem estudiant. Heus-el ací:

TEOREMA XXXV. — *Si $f(z)$ és g. e. no constant, donada una quantitat positiva ϵ fixa, però arbitràriament petita, és possible trobar un conjunt $E'_1(\epsilon)$ de valors de τ_1 relativament dens i un conjunt $E'_2(\epsilon)$ de valors de τ_2 també relativament dens, tals que, qualssevol que siguin s_1 i s_2 , siguin satisfetes les*

$$1 - \epsilon \leq \frac{N(z, \tau_1, \tau_2, s_1)}{N(z, \tau_1, \tau_2, s_2)} \leq 1 + \epsilon$$

independentment del valor de z .

Com que, segons el teorema XXVII, la funció $f(z)$ té forçosament pols, aplicant els teoremes XXX i XXXI, veurem que

$$(6) \quad \lim_{\tau_1 \tau_2} \frac{N(z, \tau_1, \tau_2, \infty)}{\tau_1 \tau_2} > 0$$

Rodegem els punts on $f(z)$ pren els valors ∞ , s_1 i s_2 per cercles, centrats en aquests punts, i de radi $r < \frac{1}{27 C_0}$ seguint un procediment semblant al descrit en la demostració del teorema anterior, pot formar-se un circuit Λ_1 frontera d'un domini Δ_1 tal que la distància entre aquest circuit i els costats del rectangle de vèrtexs

$$z, \quad z + \tau_1, \quad z + i\tau_2, \quad z + \tau_1 + i\tau_2,$$

sigui inferior a $\frac{1}{2}$ i que, a més, sobre aquest circuit Λ_1 , siguin satisfetes

$$|f(z), \infty| > \frac{m}{2}, \quad |f(z), s_2| > \frac{m}{2}, \quad |f(z), s_1| > \frac{m}{2}$$

Evidentment, la variació V de l'argument de $f(z) - s_1$ quan z descriu el tros de Λ_1 que en la construcció correspon el tros L_2 de Λ i la mateixa variació, que representarem per V_1 , quan z descriu el tros que correspon a la $L_2 + i\tau_2$, satisfaran, si η és suficientment petita,

$$|V + V_1| < \pi$$

i de la mateixa manera les variacions V' i V'_1 de l'argument de $f(z) - s_1$ quan z descriu els trossos corresponents a L'_2 i $L'_2 + \tau_1$ satisfaran, també si η és suficientment petita,

$$|V' + V'_1| < \pi$$

(per demostrar aquestes desigualtats es procedeix de forma semblant a la demostració del teorema XVIII). De tot això se segueix que

$$|V + V'_1 + V_1 + V'| < 2\pi,$$

i com sigui que la quantitat que figura en el primer membre de la desigualtat anterior és un múltiple de 2π , resultarà finalment

$$V + V'_1 + V_1 + V' = 0.$$

Representant per $N(\Delta_1, s)$ el nombre de punts interiors a Δ_1 on $f(z)$ pren el valor s , la igualtat anterior és equivalent a

$$N(\Delta_1, s_1) = N(\Delta_1, \infty).$$

De la mateixa manera es demostra també que, per η suficientment petita,

$$N(\Delta_1, s_2) = N(\Delta_1, \infty).$$

Finalment, una aplicació del teorema XXVIII ens permet demostrar que

$$|N(z, \tau_1, \tau_2, s) - N(\Delta_1, s)| < 2C_0(|\tau_1| + |\tau_2| + 2).$$

Com sigui que els τ_1 i els τ_2 que poden intervenir en la formació de Δ_1 formen dos conjunts relativament densos, fins i tot si considerem solament els que són superiors a una determinada quantitat fixa, però arbitràriament gran, les tres últimes fórmules juntament amb la (6), demostren finalment el teorema.

26. El teorema següent recorda també un teorema ja clàssic de la teoria de les funcions el·líptiques.

TEOREMA XXXVI. — *Sigui $f(z)$ una funció g. e., i siguin a_n els seus zeros i b_n els seus pols; qualssevol que siguin $\epsilon > 0$ i $r_0 > 0$, existeix un conjunt $E'_1(\epsilon, r_0)$ relativament dens en l'eix real i un conjunt $E'_2(\epsilon, r_0)$ relativament dens en l'eix imaginari, amb la propietat que per cada parell τ_1 i τ_2 tal que*

$$\tau_1 \text{ pertanyi a } E'_1 \quad \text{i} \quad \tau_2 \text{ pertanyi a } E'_2$$

és possible determinar dos nombres enters n_1 i n_2 que verifiquen

$$|\Sigma a_n - \Sigma b_n - n_1 \tau_1 - i n_2 \tau_2| < \epsilon (|\tau_1| + |\tau_2|)$$

on les Σ són esteses a tots els zeros i pols interiors a un domini Δ' que té les mateixes propietats que el Δ del teorema XXXIV.

Demostració. — Rodegem els pols i els zeros de $f(z)$ per cercles centrats en ells i de radi

$$r = \frac{1}{2C_0} \min \left(\frac{1}{9}, \frac{r_0}{2} \right)$$

i amb aquests cercles efectuem una construcció semblant a la que ja hem efectuat en els dos teoremes anteriors; evidentment obtindrem un circuit Λ' frontera de Δ' en el qual

$$(7) \quad 0 < m < |f(z)| < M < \infty.$$

Si el valor de η que determina els valors que poden prendre τ_1 i τ_2 és suficientment petit, podrem escriure, tenint en compte la (7),

$$(8) \quad |\log |f(z)| - \log |f(z + i\tau_2)|| < \eta_2,$$

si z es troba en el tros corresponent a L_2 ; de la mateixa manera

$$(9) \quad |\log |f(z)| - \log |f(z + \tau_1)|| < \eta_2.$$

si z es troba sobre el tros de Λ' que correspon a L'_2 .

Com que

$$\Sigma a_n - \Sigma b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda'} \frac{f'(z)}{f(z)} z dz$$

per demostrar el teorema necessitem calcular la integral del segon membre d'aquesta igualtat; representem per z_0 el punt en què s'uneixen els trossos corresponents a L_2 i L'_2 ; integrant per parts, obtindrem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta'} \frac{f'(z)}{f(z)} z dz = \frac{z_0}{2\pi i} (\arg f(z_0 + \Lambda') - \arg f(z_0)) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta'} \log f(z) dz$$

on $\arg f(z_0 + \Lambda')$ representa l'argument de $f(z)$ que s'obté partint de z_0 amb la determinació $\arg f(z_0)$ i descrivint un sol cop en sentit positiu el circuit Λ' ; per una demostració semblant a la del teorema anterior resulta

$$\arg f(z_0 + \Lambda') = \arg f(z_0)$$

i, per tant, solament manca calcular

$$\begin{aligned} \int_{\Delta'} \log f(z) dz &= \int_{L_1} (\log f(z) - \log f(z + i\tau_2)) dz + \\ &+ \int_{L'_1} (\log f(z + \tau_1) - \log f(z)) dz \end{aligned}$$

les (7), (8) i (9) donaran, si η i, per tant, η_2 és suficientment petita,

$$\log f(z) - \log f(z + i\tau_2) = -2\pi i (n_1 + \eta_3 \varphi_1(z))$$

$$\log f(z + \tau_1) - \log f(z) = -2\pi i (n_2 + \eta_3 \varphi_2(z)),$$

on $|\varphi_1(z)| < 1$ i $|\varphi_2(z)| < 1$, i η_3 depèn únicament de η , de m i de M i tendeix vers 0 quan η esdevé infinitament petita. Finalment tindrem, doncs, després de fàcils transformacions,

$$|\Sigma a_n - \Sigma b_n - n_1 \tau_1 - i n_2 \tau_2| < \eta_3 (|\tau_1| + |\tau_2|) (1 + 30\pi C_0 r);$$

per tant, prenent η suficientment petita perquè la desigualtat

$$7\eta_3 \leq \epsilon$$

sigui satisfeta, tindrem

$$|\Sigma a_n - \Sigma b_n - n_1 \tau_1 - i n_2 \tau_2| < \epsilon (|\tau_1| + |\tau_2|)$$

o sigui l'afirmació del teorema.

27. TEOREMA XXXVII. — *Tota funció g. e. que no sigui constant és de tipus mitjà de l'ordre 2 i, per tant, de gènere 2.*

En efecte, representem, seguint a Nevanlinna, per $n(r, s)$ el nombre de zeros de $f(z) - s$ en el cercle $|z| \leq r$. Ja que, segons el teorema XXVIII, el nombre de zeros de $f(z) - s$ interiors a qualsevol quadrat de costats unitat és igual o inferior a C_0 , dividint el pla en quadrats de costats unitat i representant per $k(r)$ el nombre d'aquests quadrats que tenen punts en comú amb el cercle $|z| \leq r$, tindrem

$$n(r, s) \leq C_0 k(r);$$

però com que la suma de tots aquests quadrats no omple el cercle $|z| \leq r + \sqrt{2}$, resulta

$$k(r) < \pi (r + \sqrt{2})^2$$

i finalment

$$(10) \quad n(r, s) < \pi C_0 (r + \sqrt{2})^2.$$

Ara bé, el teorema XXX permet demostrar l'existència de dos nombres l_1 i l_2 tals que tot rectangle, on el costat paral·lel a l'eix real té la llargada l_1 i el costat paral·lel a l'eix imaginari té la llargada l_2 , conté almenys un zero de $f(z) - s$. Partint el pla en rectangles d'aquesta classe i tenint en compte que el cercle $|z| \leq r$ en conté com a mínim

$$\frac{\pi}{l_1 l_2} \left(r - \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right)^2,$$

resultarà

$$(11) \quad n(r, s) > \frac{\pi}{l_1 l_2} \left(r - \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \right)^2;$$

com que les fórmules (10) i (11) valen qualsevol que sigui s , la teoria de Nevanlinna demostra ràpidament el teorema.

ACABAT D'IMPRIMIR A LA IMPREMTA ALTÉS, S. L.,
DE BARCELONA, EL DIA 31 DE DESEMBRE DE L'ANY 1949

